

《数值分析》（A 卷）考试试题参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 截断误差 , 2. $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 3. $\text{cond}(A)$ 很大,
4. 7 , 5. $-2x_2 + 1.5x_3 = 3.5$, 6. 二

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

7. C 8. A 9. D 10. D 11. A 12. D

三、计算题（每小题 12 分，共 48 分）

13. 解：5 个点对应的函数值 $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	1	0.666667	0.333333	0.181818	0.111111

(1) 复合梯形公式 ($n=4, h=2/4=0.5$) :

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{0.5}{2} [1 + 2 \times (0.666667 + 0.333333 + 0.181818) + 0.111111] \\ &= 0.868687 \end{aligned}$$

(2) 复合 Simpson 公式 ($n=2, h=2/2=1$) :

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{6} [1 + 4 \times (0.666667 + 0.181818) + 2 \times 0.333333 + 0.111111] \\ &= 0.861953 \end{aligned}$$

14. 解：当 $x \in [0,1]$ 时，

$$I(x) = \frac{x-1}{0-1} \times 1 + \frac{x-0}{1-0} \times 0.5 = -0.5x + 1,$$

当 $x \in [1,2]$ 时，

$$I(x) = \frac{x-2}{1-2} \times 0.5 + \frac{x-1}{2-1} \times 0.2 = -0.3x + 0.8,$$

综上，分段线性插值函数为

$$I(x) = \begin{cases} -0.5x + 1, & x \in [0, 1] \\ -0.3x + 0.8, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

所以

$$f(1.5) \approx I(1.5) = -0.3 \times 1.5 + 0.8 = 0.35$$

15. 解: Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(11 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(18 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(22 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	2.7500	3.8125	2.5375
2	0.20938	3.1789	3.6805
3	0.24043	2.5997	3.1839
4	0.50420	2.4820	3.7019

16. 解: 取 $\varphi_1 = \text{span}\{1, x\}$, 设 $S_1^* = a_0 + a_1x$ 是函数 x^2 在 $[0, 1]$ 的最佳平方逼近,

则法方程组为

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,x) \\ (x,1) & (x,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^2,1) \\ (x^2,x) \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

解得 $a_0 = -\frac{1}{6}, a_1 = 1$, 所以

$$S_1^* = -\frac{1}{6} + x = -0.1667 + x$$

取 $\varphi_2 = \text{span}\{x^{100}, x^{101}\}$, 设 $S_2^* = b_0 + b_1x$ 是函数 x^2 在 $[0,1]$ 的最佳平方逼近,
则法方程组为

$$\begin{bmatrix} (x^{100}, x^{100}) & (x^{101}, x^{100}) \\ (x^{100}, x^{101}) & (x^{101}, x^{101}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^2, x^{100}) \\ (x^2, x^{101}) \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{201} & \frac{1}{202} \\ \frac{1}{202} & \frac{1}{203} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{103} \\ \frac{1}{104} \end{bmatrix}$$

$$\text{解得 } b_0 = -\frac{2009799}{5356} \approx 375.2425317, b_1 = -\frac{1004647}{2678} \approx -375.1482450,$$

所以

$$S_2^* = 375.242531x^{100} - 375.148245x^{101}$$

平方误差分别为

$$\|S_1^* - x^2\|_2^2 = \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} + x - x^2\right)^2 dx = \frac{1}{180} \approx 0.005556$$

$$\begin{aligned} \|S_2^* - x^2\|_2^2 &= \int_0^1 (375.24253x^{100} - 375.148245x^{101} - x^2)^2 dx \\ &\approx 0.1640632869 \end{aligned}$$

前者误差小.

四、证明题（每小题 8 分，共计 16 分）

17. 证明：设 x^* 为方程 $f(x) = 0$ 在 $[0,1]$ 上的精确解， x_n 为二分 n 次得到的数值解，则有

$$|x^* - x_n| \leq \frac{1-0}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

又二分 n 后得到的近似根，要求计算结果保留四位有效数字，从而有

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-1-(4-1)},$$

解得 $n \geq 13.28771238$ ，从而取 $n = 14$ 。

18. 证明：（1）设 $y_n = y(t_n)$ ，则 $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$ ，将 $y(t_{n+1})$ 在 t_n 处作 Taylor 展开

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), t_n < \xi < t_{n+1}$$

由 Euler 方法得

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) = y(t_n) + hy'(t_n),$$

上面两式相减得，

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi) = \mathcal{O}(h^2),$$

于是由 $p + 1 = 2$ 得 $p = 1$ ，即：Euler 方法是具有一阶精度的数值方法。

（2）根据题设知 $f(t, y) = \frac{3y}{1+t}$ ，则 Huen 方法的计算格式为

$$\begin{cases} p_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, p_{n+1})] \end{cases},$$

由 $y_0 = y(0) = 1, h = 0.5$ ，得

$$\begin{cases} p_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.5 \times \frac{3 \times 1}{1+0} = 2.5, \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, y_0) + f(t_1, p_1)] = 1 + \frac{0.5}{2} \times \left[\frac{3 \times 1}{1+0} + \frac{3 \times 2.5}{1+0.5} \right] = 3, \\ p_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 3 + 0.5 \times \frac{3 \times 3}{1+0.5} = 6, \\ y_2 = y_1 + \frac{h}{2} [f(t_1, y_1) + f(t_2, p_2)] = 3 + \frac{0.5}{2} \times \left[\frac{3 \times 3}{1+0.5} + \frac{3 \times 6}{1+1} \right] = 6.75 \end{cases},$$